数理解析研究所講究録
1057巻 1998年 72-87

Kontsevich の universal Vassiliev invariant について

島田信夫 (Nobuo Shimada)

Abstract − After the initial impetus by Vassiliev $[V]_{1,2}$, Kontsevich [K] has been able to give an explicit formula for a universal invariant of knots using the evaluation of some complicated multiple integrals depending on the actual realization of a knot by a smooth curve in the 3-space R^3. In this expository note, we would like to introduce the recent attempt of Cartier [C], which provides a combinatorial construction of the Vassiliev-Kontsevich invariant, through utilizing famous results of Drinfeld $[D]_{1,2}$ to produce a definition of the invariant which can be read off from a plane diagram. The key point in this method is a category theoretical approach. An explicit formula of the Kontsevich-Cartier functor will be presented.

1. 順備

ノット(knot 結び目)とは，御承知の様に，3次元空間R^3に埋め込まれた滑らかな閉曲線K，または，それを像とする単位円周S^1からの imbedding を意味し，その ambient isotopy (全同位)類をノット型と呼ぶ．有向(向きのついた)ノット型の全

体を$\mathcal{K}$で表わす．ノットが自明な法ベクトル野を伴ったものは framed knot（枠付きノット）と呼ばれ，その場合は枠付き同位を考える。枠付き有向ノット型の全体を$\mathcal{K}^f$で表わす．集合$\mathcal{K}$（$\mathcal{K}^f$）で生成された自由加群をΛ（Λ^f）と記し，（枠付き）有向ノット加群と呼ぶ．ノットの連結和によって積を入れると，可換な積をもつ有向ノット代数Λ（およびΛ^f）が得られる．次に，特異点として有限個の double pt.（二重点）だけを持つような singular knot（特異ノット）を考えると，前と同様に$S\mathcal{K}$，$S\mathcal{K}^f$などの集合，またそれらから生成された加群$S\Lambda=\mathbb{Z}\{S\mathcal{K}\}$，$S\Lambda^f$などが得られる．特異ノットの場合の同位は，各二重点の円板近傍を保存したままの変形を考えるものとする．n個の二重点をもつ特異ノット型の集合$S_n\mathcal{K}$から張られた$S\Lambda$の部分加群を$S_n\Lambda$で表わす．以下すべてノットは有向なものだけを考える．自然な線形写像$\tau: S_n\Lambda\to\Lambda$（$\tau: S_n\Lambda^f\to\Lambda^f$）が次の様に定義される：$K\in S_n\mathcal{K}$をとり，その二重点集合$\{p_1,p_2,\cdots p_n\}$から$\{+1,-1\}$への任意の写像$\alpha$：$\alpha(p_i)=\varepsilon_i=+1$ or -1，に対して，記号K_αは，各二重点p_iにおいてKの交点を"開いて"上下道の交差点を作り，その交差点における"符号"が丁度ε_iとなるようにしたものを表わす．

 $\varepsilon_i=+1$　 $\varepsilon_j=-1$

p_i　p_j

$K_\alpha=K_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}$と表わしてもよいかも知れない．これは従って特異点を持たない普通のノットとなる．

これらK_αに符号$\varepsilon(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_i$をつけて加えたもの$\sum_\alpha\varepsilon(\alpha)\cdot K_\alpha=\tau(K)$

により写像 $\tau: S_n\Lambda \to \Lambda$ が定義される。($\tau: S_n\Lambda^f \to \Lambda^f$ も同様)
この写像の像 $\tau(S_n\Lambda)$ を $\Lambda_n \subset \Lambda$ とおく。このとき容易に
$\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$ が験される。従って $\Lambda=\Lambda_0\supset\Lambda_1\supset\cdots\Lambda_n\supset\Lambda_{n+1}\supset\cdots$
なる減少 filtration が得られる。($\Lambda^f=\Lambda^f_0\supset\Lambda^f_1\supset\cdots\Lambda^f_n\supset\cdots$ も同様)
さて $\Lambda\,(\Lambda^f)$ は上記の様に可換な積をもつが、この積は
$\Lambda_n\cdot\Lambda_\ell \subset \Lambda_{n+\ell}$ の条件を満たし、従って対応する grade 加群
$G(\Lambda)=\bigoplus_n G_n(\Lambda)$, $G_n(\Lambda)=\Lambda_n/\Lambda_{n+1}$ においても可換積 $G_p(\Lambda)\otimes G_q(\Lambda)\to$
$G_{p+q}(\Lambda)$ を導びく ($G(\Lambda^f)$でも同様) 詳細は略するが、実はノット代数 Λ, Λ^f, $G(\Lambda)$, $G(\Lambda^f)$ 等はこの積の他に可換な余積をもち Hopf 代数となることが知られている。

ノット加群 $\Lambda\,(\Lambda^f)$ の係数域を拡大し体係数例えば $\mathbb{C}$-係数としよう。このとき $V_n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Lambda/\Lambda_{n+1}, \mathbb{C}) = (\Lambda/\Lambda_{n+1})^*$ (*は双対ベクトル空間を意味する)とおいて、V_n の元を、位数 n の Vassiliev 不変量(または有限型不変量)と呼ぶ。$\Lambda_n\supset\Lambda_{n+1}$ であるから、

$$V_{n-1}=(\Lambda/\Lambda_n)^* \hookrightarrow V_n=(\Lambda/\Lambda_{n+1})^* \twoheadrightarrow V_n/V_{n-1} \approx (\Lambda_n/\Lambda_{n+1})^* \quad \cdots\cdots (1)$$

という完全系列が得られ、枠付きの場合も同様である

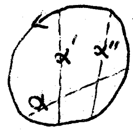
$$V^f_{n-1}=(\Lambda^f/\Lambda^f_n)^* \hookrightarrow V^f_n=(\Lambda/\Lambda_{n+1})^* \twoheadrightarrow V^f_n/V^f_{n-1} \approx (\Lambda^f_n/\Lambda^f_{n+1})^* \quad \cdots\cdots (1)^f$$

Vassiliev 不変量は上記の様に総称的なもので、概念的には、従来の多くのノット不変量(多項式不変量等)を含んでいることが知られている。

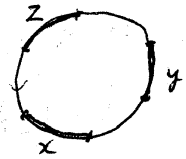
2. chord diagram

向きのついた円周 S^1 に張られた弦の有限列 $\{\alpha, \alpha', \cdots \alpha^{(n)}\}$ を

chord diagram (弦図式) とよぶ。これは S^1 上の点対(各弦の両端)の集合を与えることと同値である。この様な弦図式の同相類(向きも込めた)を弦図式型とよび、それらの全体を $\mathcal{D}^c$ で表わす。特に弦が n 本から成る図式型の集合を $\mathcal{D}^c_n$ で表わす。ノットの場合と同様に加群 $\mathbb{Z}\{\mathcal{D}^c\}$, $\mathbb{Z}\{\mathcal{D}^c_n\}$, $\mathbb{C}\{\mathcal{D}^c\}$ 等を考える。 これらの加群に次の様

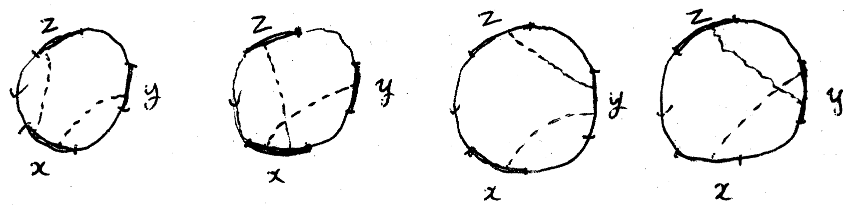


弦を点線または実線で表わす



な4項関係(4T-relation)と呼ばれるものを導入する：先づ有向円周上で三つの disjoint な線分 x, y, z を定めておく。(上図参照)
これに対して、次の様な弦図式 D_1, D_2, D_3, D_4 の1次結合を零と置いたものを<u>4項関係</u>と呼ぶ。

$$D_1 - D_2 - D_3 + D_4 \sim 0 \quad \left(\text{または} (D_1 - D_2) \sim (D_3 - D_4)\right) \cdots (2)$$



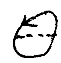
D_1 D_2 D_3

ただし、これらの図式において、x, y, z-部分に端点をもつ二つの弦は上図の様に点線で表わしたものであって、別に $S^1 - \{x \cup y \cup z\}$ の部分に端点をもつ弦は D_1, D_2, D_3, D_4 のすべてに共通の状態で何本あっても可とする。

さて4項関係で生成された部分加群による商加群を考える。

$$\mathcal{A}^f_n = \mathbb{C}\{\mathcal{D}^c_n\}/(4T\text{-rel.}) \qquad \cdots (3)$$

$$\mathcal{A}_n = \mathbb{C}\{\mathcal{D}^c_n\}/(4T\text{-rel}, \delta_1)$$

, $\delta_1 =$  弦がただ一本のもの

$\mathcal{A}^f = \sum_n \mathcal{A}^f_n$, $\mathcal{A} = \sum_n \mathcal{A}_n$ は弦図式の連結和によって、可換代数となる。

3. 弦図式からノットへの対応

$\mathcal{D}_n^c$ から 特異ノット集合 $S_n\mathcal{K}$ への自然な対応(ただし一意でない)が, 弦図式 D を $\mathbb{R}^3$ へ immerse することで得られる. ただしこの場合 D の弦は考えず, 単に, 弦の両端を一点に重ねる(つまり二重点をつくる)写像を考える. 弦の両端点以外(の円周部分)は滑らかに埋め込むに際してかなりの自由度がある。(どの様なノット状態でもかまわぬから). しかし, この一意でない対応を更に $S_n\Lambda \xrightarrow{?} \Lambda_n$ を通して考えると, 4項関係式は実際0にうつる. 従って $\mathbb{Z}\{\mathcal{D}_n^c\}$ から Λ_n への写像は $\mathcal{A}_n^f$ から Λ_n^f ($\mathcal{A}_n$ から Λ_n) への写像を導びく. しかしこの写像も一意的でなくて, modulo Λ_{n+1} で考えれば well-defined な線形写像 $\varphi_n : \mathcal{A}_n \twoheadrightarrow \Lambda_n/\Lambda_{n+1}$, $\mathcal{A}_n^f \overset{\varphi_n^f}{\twoheadrightarrow}$ (4)
$\Lambda_n^f/\Lambda_{n+1}^f$ となる. φ_n は surjective(上への写像)である.(係数域は体としておく) これから $\dim \mathbb{C}\{\mathcal{D}_n^c\} > \dim \mathcal{A}_n \geqq \dim(\Lambda_n/\Lambda_{n+1}) = \dim G_n(\Lambda)$
(5)
ここで $\dim \mathbb{C}\{\mathcal{D}_n^c\} = (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$

(4)から $\mathcal{A}_n^* \overset{\varphi_n^*}{\hookleftarrow} (\Lambda_n/\Lambda_{n+1})^* \approx V_n/V_{n-1}$ (framed version も同じ) (6)

これにより order n の Vassiliev 不変量の全体は $\mathcal{A}_n^*$ の部分集合であることがわかる. Kontsevich の定理は φ_n (φ_n^*), φ_n^f 等が同型であることを証明する.

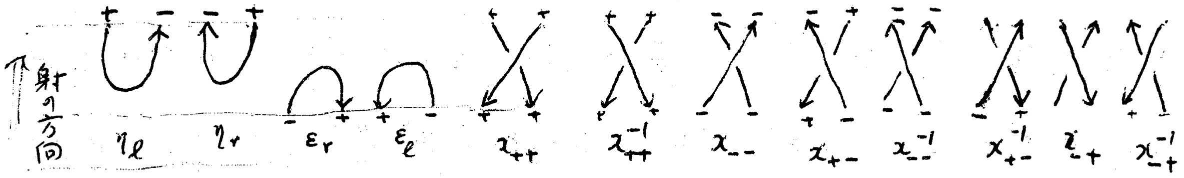
4. oriented tangles の圏 $\mathcal{L}$. 圏 $\mathcal{L}$ の対象(object)は, +, − の有限列および空集合 ϕ とする. $\mathcal{L}$ は tensor 積 $\otimes : \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ という函手(functor)をもつ: $\{+-\}\otimes\{-+-\} = \{+--+-\}$ (つまり単なる併列) この場合, object ϕ は単位元の様な役割を果すので, 単位対象 I とも呼ばれる. 射(morphism)としては, 先づ

対象＋の恒等射 id_+（記号で↓を使う）と−の恒等射 $id_- = \uparrow$，および

basic morphism と呼ばれる次のもの：$\eta_\ell : I=\phi \to \{+-\}$，$\eta_r : I \to \{-+\}$，　(7)

$\varepsilon_r : \{-+\} \to I$，$\varepsilon_\ell : \{+-\} \to I$，$x_{ij} : i\otimes j \to j\otimes i$，$x_{ij}^{-1} : j\otimes i \to i\otimes j$（$i, j$

は＋または−を表わす）などがあり，それらは以下の様に図示される：



(8)

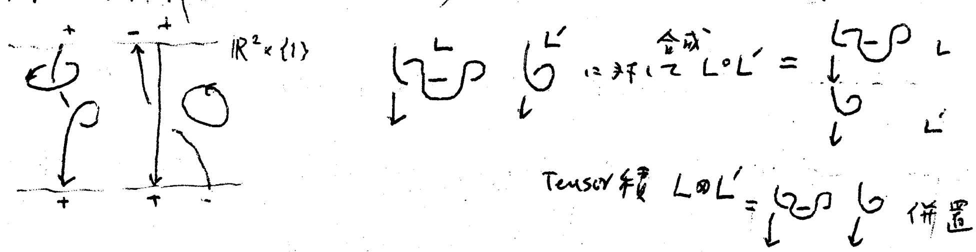
x_{ij} は braiding とよばれ，x_{++} などの表示は紛らわしいので番号をつけて x_{12} で表わすこともある．1は1番目の＋，2は2番目の＋の意味，x_{+-} は $x_{1\bar{2}}$ で表わす，つまり1番目が＋，2番目は−の意味である．また x_{ij} は交差点の符号がプラス（正）のもの，x_{ij}^{-1} は符号がマイナス（負）であるものを意味し，x_{ij}^{-1} は x_{ij} の逆元である．

また，これら basic 射の一つと，いくつかの恒等射 ↓，↑ の tensor 積の形

例えば $\downarrow\otimes\frown$，$\cup\otimes\downarrow\otimes\uparrow$，$\uparrow\otimes\times\otimes\downarrow$ 等々　(9)

のものを elementary 射（elementary tangle）と呼ぶ．一般の oriented tangle とは，$\mathcal{L}$ の射として，elementary 射の合成によって得られるものであるが，直観的には，$\mathbb{R}^2\times[0,1]$ にて埋め込まれた，1次元有向コンパクト多様体 M で境界 $\partial M = M\cap(\mathbb{R}^2\times\{0\}\cup\mathbb{R}^2\times\{1\})$ となるものと考えてよい．

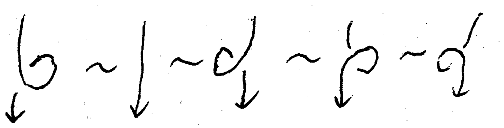
例．

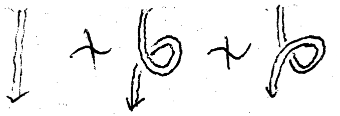


(10)

註．射 x_{ij}（とその逆 x_{ij}^{-1}）は braid 群の生成元である．braid（組み紐）は tangle のうちに数えられる．knot も tangle の一部であり，link（いくつかの knots が絡み合ったもの）もそうである．$Mor_{\mathcal{L}}(I, I) = \{links\}$（$I = \phi$）

二つの tangles M, N は，$\mathbb{R}^2\times[0,1]$ の ambient isotopy（ただし $\mathbb{R}^2\times\{0\}$, $\mathbb{R}^2\times\{1\}$ はそれぞれの点が固定される）により互に移り合うとき，同じ同位型にぞくするものとして区別しない．実際には knot の場合と同様 平面投影図式において，三つの基本 Reidemeister 運動の積み重ねにより移り合うときに限り同位である．前と同様 tangle においても framed（枠つき）のものが考えられ，framed (oriented) tangles の圏 $\mathcal{L}^f$ に対して上述の様な事柄が殆んどすべて同様に成り立つ．但し射の同位関係では重要な違いがある：

 in $\mathcal{L}$

 in $\mathcal{L}^f$

法ベクトル野を tangle の方向 tangent ベクトルと共にこの平面上にとるとリボン状の tangle ができる．framed tangle を ribbon tangle と呼ぶ人もある

(11)

5. monoidal category

モノイド圏（またはテンソル圏）$\mathcal{C}$ とは，函手 (functor) $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，unit object I を持ち，また自然同型

$$l : I\otimes A \xrightarrow{\approx} A,\quad r : A\otimes I \xrightarrow{\approx} A,\quad \alpha : (A\otimes B)\otimes C \xrightarrow{\approx} A\otimes(B\otimes C)$$

が存在するもので，l, r については，恒等射と見なしてよい場合が多い．ここでは簡単のため $I\otimes A = A = A\otimes I$ で l, r は共に恒等射であると仮定する．α は associativity constraint と呼ばれるものだが，一般的には恒等射と見るわけに行かず，ただ次の Pentagon axiom を満たすものと仮定する：

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes(B\otimes C))\otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}_{A,B,C}\otimes 1_D"'] & & A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[d, "1_A\otimes\alpha_{B,C,D}"] \\
((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[r, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & A\otimes(B\otimes(C\otimes D))
\end{tikzcd} \qquad (12)$$

特に $\alpha_{A,B,C} = id$ と見なしてよい場合は $\mathcal{C}$ を strict monoidal category という。例えば tangles の cat. $\mathcal{L}^{(f)}$ はそうである。

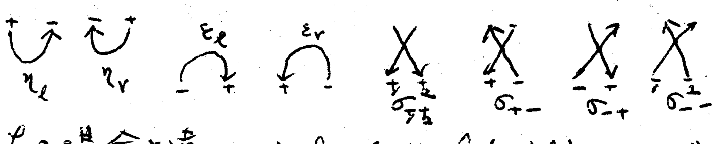
monoidal category が braided であるとは、braiding $c_{X,Y} : X\otimes Y \to Y\otimes X$ という自然同型 (nat. isomorphism) があって、次の Hexagon axiom が成立しているものとする；

$$c_{X\otimes Y, Z} = \alpha_{Z,X,Y}\circ(c_{X,Z}\otimes 1_Y)\circ\alpha^{-1}_{X,Z,Y}\circ(1_X\otimes c_{Y,Z})\circ\alpha_{X,Y,Z}$$
$$c_{X, Y\otimes Z} = \alpha^{-1}_{Y,Z,X}\circ(1_Y\otimes c_{X,Z})\circ\alpha_{Y,X,Z}\circ(c_{X,Y}\otimes 1_Z)\circ\alpha_{X,Y,Z} \qquad (13)$$

例えば、tangle の圏 $\mathcal{L}^{(f)}$ は braiding $x_{X,Y}$ をもち braided 圏である。

6. 圏 $\mathcal{T}[[h]]$

strict monoidal category で $Ob\,\mathcal{T} = Ob\,\mathcal{L}$ であり、$Mor_{\mathcal{T}}(X,Y)$ は $\mathbb{C}$-vector 空間で 射の tensor 積 $f\otimes g$ は bilinear であるような圏 $\mathcal{T}$ を構成しよう。braiding としては単なる交換射 $\sigma_{X,Y} : X\otimes Y \to Y\otimes X$, $\sigma_{Y,X} = \sigma^{-1}_{X,Y}$ をもち、basic な射としては、$\eta_\ell : I \to \{+-\}$, $\eta_r : I \to \{-+\}$, $\varepsilon_r : \{-+\} \to I$, $\varepsilon_\ell : \{+-\} \to I$ は $\mathcal{L}$ の場合と同じで、$\sigma_{X,Y}$ が $\mathcal{L}$ における $x_{X,Y}$ に相当する。$id_+ = \downarrow$ $id_- = \uparrow$ は $\mathcal{L}$ の場合と同じである。

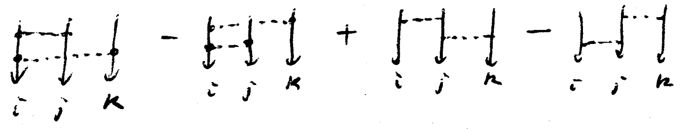
記号として  を用いる場合もある。(14)

その他に、$\mathcal{L}$ の場合と違って、infinitesimal braiding とよばれる自然変換 $t_{X,Y}$ $(X \overset{\text{for}}{\neq} Y)$、$t_{X,Y} : X\otimes Y \to X\otimes Y$ があって、記号として (t_{XY}) $(t_{X\bar{Y}})$ $(t_{\bar{X}\bar{Y}})$ $(t_{\bar{X}Y})$ を用いる場合がある。$t_{X,Y}$ に関する関係式として、

$$t_{ij} = t_{ji} \ (i\neq j),\quad [t_{ij}, t_{k\ell}] = 0 \ (i,j,k,\ell \text{ すべてが相異なるとき})$$
$$[t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0 \ (i,j,k \text{ が相異なるとき}) \qquad (15)$$

これらの式において [,] は交換子積であり i, j などを $\bar{i}, \bar{j}$ でおきかえてもよい。
$\mathcal{T}$ における二つの射を同値とみるのは、$\mathcal{L}$ の場合と同じ同位関係である。

上の最後の関係式は次のことを意味する：

 $= 0$ (16)

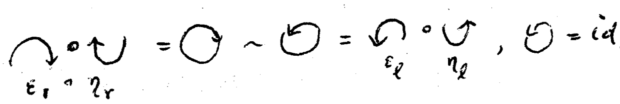
$t_{ij}t_{ik} - t_{ik}t_{ij} + t_{ij}t_{jk} - t_{jk}t_{ij}$

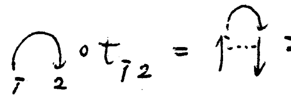
射の関係式として

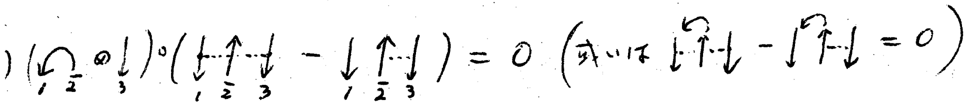
i) $\sigma_{X,Y}\, t_{X,Y} = t_{Y,X}\, \sigma_{X,Y}$ （対称性）

ii) $t_{X\otimes Y,Z} = 1_X \otimes t_{Y,Z} + (1_X \otimes \sigma_{YZ})^{-1}(t_{X,Z}\otimes 1_Y)(1_X\otimes \sigma_{YZ})$ （加法性）

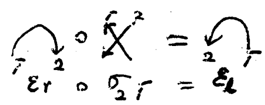
（或いは略記して $t_{(XY)Z} = t_{Y,Z} + t_{X,Z}$ も用いる。）

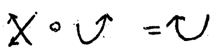
iii)  ，$\bigcirc = id_I$ （これは$\mathcal{L}$の場合も同じ） (17)

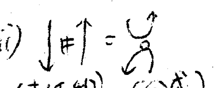
iv)  $= 0$ （framing free condition）

v) 

または  $\circ(t_{13} - t_{\bar{2}3}) = 0$

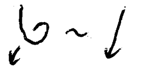
vi)  （$\varepsilon_r \circ \sigma = \varepsilon_l$）

 （$\sigma \circ \eta_l = \eta_r$）

vii)  （$\mathcal{L}$においても同様）

などがある。iv)の関係はframing free condition $\delta_1 = 0$ in $\mathcal{A}$に相当する。従って圏$\mathcal{T}$に対して、ただ条件iv)だけがない（が他はすべて$\mathcal{T}$と同じ）圏を$\mathcal{T}^f$と書いて、$\mathcal{T}$のframed versionと考える。

条件iv)は圏$\mathcal{L}$におけるReidemeister move 1)



に対応するものと考えることができる。Mor$\,\mathcal{T}(I,I)$の連結成分Mor$_{\mathcal{T}}(I,I)_0 = \mathcal{A}$：弦図式代数と見なせる。

tensor圏$\mathcal{T}$とそのinfinitesimal braiding t_{ij}から新しい圏$\mathcal{T}[[h]]$を定義する。これは$\mathcal{T}$のdeformationとも見なせるもので、$Ob(\mathcal{T}[[h]]) = Ob\,\mathcal{T}$，射$f: X \to Y$ in $\mathcal{T}[[h]]$は形式的巾級数$f = \sum_n f_n h^n$，$f_n : X \to Y \in Mor\,\mathcal{T}$（$h$はMor$\,\mathcal{T}$と可換な不定元）

で与えられる. $\mathrm{Mor}_{\mathcal{T}[[h]]}(X,Y)$ は, $\mathbb{C}$-vector spaces の tensor 積 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(X,Y)\otimes\mathbb{C}[h]$ の商空間の射影的系 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(X,Y)\otimes\mathbb{C}[h]/(h^n) \twoheadleftarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(X,Y)\otimes\mathbb{C}[h]/(h^{n+1})$ の逆極限 $\varprojlim_n \mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(X,Y)\otimes\mathbb{C}[h]/(h^n)$ として定義された完備位相加群とみる. 従って $\sum_n f_n h^n$ は一つの元 f に収束する. $\mathcal{T}[[h]]$ における tensor 積は object 上では $\mathcal{T}$ における と同じであり, $\mathcal{T}$ が strict monoidal であったから, 特に $(X\otimes Y)\otimes Z = X\otimes(Y\otimes Z)$ が成り立つ. 射の tensor 積は $f=\sum_n f_n h^n$, $g=\sum_n g_n h^n$ のとき $f\otimes g = \sum_n \sum_{k+l=n}(f_k\otimes g_l)h^n$ で与えられる. $\mathcal{T}[[h]]$ が一般的な monoidal 圏として定義されるためには, associativity constraint α が何う与えられるかが問題である. それは

a) associativity constraint $\alpha_{X,Y,Z} = \Phi(ht_{XY}, ht_{YZ}) : (X\otimes Y)\otimes Z \xrightarrow{\cong} X\otimes(Y\otimes Z)$ (18)

で与えられる. ここで $\Phi(u,v)$ は Drinfeld series と呼ばれるもので, Knizhnik–Zamolodchikov 微分方程式の解空間の monodromy を通じて, 後出の braiding $R_{X,Y}$ と共に捉えられた. 詳細は文献([D]$_{1,2}$, [Ko]) に譲り, 多少の説明を付す. 先ず不定元 t_{ij} $(1\leq i\neq j\leq m)$ から生成され, relations として (15) をもつ, $\mathbb{C}$-上の Lie 環 $\mathfrak{t}_m$ を考え, $U(\mathfrak{t}_m)$ でその universal enveloping algebra を表わす. $\deg t_{ij}=1$ とおいて, grade algebra とみる. $U(\mathfrak{t}_m)$ を degree により完備化したものを $\widehat{U(\mathfrak{t}_m)}$ と記す. $\Phi(u,v)$ は非可換 formal series in $\widehat{U(\mathfrak{t}_4)}$ で, $\Phi(v,u)=\Phi(u,v)^{-1}$ かつ, 次の等式を満足するものとして定義される:

$$\Phi(t_{12},t_{23}+t_{24})\cdot\Phi(t_{13}+t_{23},t_{34}) = \Phi(t_{23},t_{34})\Phi(t_{12}+t_{13},t_{24}+t_{34})\circ\Phi(t_{12},t_{23})$$

$$\exp\tfrac{1}{2}(t_{13}+t_{23}) = \Phi(t_{13},t_{12})\cdot\exp\tfrac{1}{2}t_{13}\,\Phi(t_{13},t_{23})^{-1}\cdot\exp\tfrac{1}{2}t_{23}\cdot\Phi(t_{12},t_{23}) \quad (19)$$

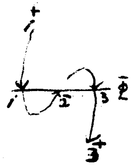
b) 圏 $\mathcal{T}[[h]]$ における braiding としては, ($\mathcal{T}^f[[h]]$ でも同じもの)

$$R_{X,Y} = \sigma_{X,Y}\circ\exp\left(\tfrac{h}{2}t_{X,Y}\right)$$ をとる.

Drinfeld [D]$_{1,2}$ によって，$\alpha_{X,Y,Z} = \Phi(ht_{XY}, ht_{YZ})$ と braiding $R_{X,Y}$ が Pentagon axiom (12) と Hexagon axiom (13) を満足することが示された。

$\mathcal{T}[[h]]$における重要な射として次のものがある。

$$\lambda_+ = (\downarrow_1 \otimes \curvearrowright_{\bar{2}\,3}) \circ \Phi(ht_{1\bar{2}}, ht_{\bar{2}3}) \circ (\curvearrowleft^{\bar{2}} \otimes \downarrow_3) : \overset{+}{3} \to \overset{+}{1} \qquad (20)$$



$$\lambda = \curvearrowright_{1\,\bar{4}} \circ (\lambda_+ \otimes \uparrow_4) \circ \curvearrowleft^{3\,\bar{4}} : \phi \to \phi$$

$\Phi(ht_{1\bar{2}}, ht_{\bar{2}3}) = \Phi_{1\bar{2},3} : (1\otimes\bar{2})\otimes 3 \xrightarrow{\sim} 1\otimes(\bar{2}\otimes 3)$
と略記するのが便利である。

Φがinvertibleであるのでλ_+もλもそうである。

Drinfeldによれば，$\Phi(ht_{XY}, ht_{YZ}) = 1_{X\otimes Y\otimes Z} + \frac{1}{24}[t_{XY}, t_{YZ}]h^2 \pmod{(h^3)}$。

7. VDKC functor

上述の圏$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^f$, $\mathcal{T}[[h]]$, $\mathcal{T}^f[[h]]$等はすべてbraidedなmonoidal圏であるが，中でも$\mathcal{L}^f$はuniversalな性格をもち，他のbraided monoidalな圏$\mathcal{C}$とその一つのobject Vを与えれば，(他に$\mathcal{C}$はdualityをもつという条件があるが) monoidal, braidedなfunctor $F : \mathcal{L}^f \to \mathcal{C}$で，$F(+) = V$なるものが一意的に存在するという定理(Joyal-Street, Turaev)があると聞くが，以下では具体的に，この様なfunctor $Z^f : \mathcal{L}^f \to \mathcal{T}^f[[h]]$ またそれから定まる $Z : \mathcal{L} \to \mathcal{T}[[h]]$ を定義しよう。これらを仮りにVassiliev-Drinfeld-Kontsevich-Cartier functorと呼ぶ。Z^fとZは殆んど違わない。$Z^{(f)}(f\circ g) = Z^{(f)}(f)\circ Z^{(f)}(g)$は常に成立するが，$Z^{(f)}(f\otimes g) = Z^{(f)}(f)\otimes Z^{(f)}(g)$は必ずしも成立しないので，そういう場合は特に注意することとして，これらのfunctorを先づbasicおよびelementary tangleについて定義しよう。

$\mathcal{L}^f, \mathcal{L}, \mathcal{T}[[h]], \mathcal{T}^f[[h]]$ すべてを通じて, objects は $+, -$ の有限列および $I = \phi$ であるので functor Z^f, Z 共 object 上では恒等的である. $Z^f(\pm) = \pm$, 従って $Z^{(f)}(\updownarrow) = \updownarrow = id_\pm$　$Z^{(f)}(\varepsilon, \eta)$ についてはそれ程単純でないので後回わしにする.

$$Z^{(f)}(\times_{X,Y}) = R_{X,Y} = \sigma_{XY}\exp\left(\frac{h}{2}t_{X,Y}\right) : X\otimes Y \to Y\otimes X \tag{21}$$

単独の ε や η については

$$Z^{(f)}(\frown) = \frown \quad (\text{矢印は一方をとる. 恒等的})$$
$$Z^{(f)}(\smile) = \smile \quad (\quad〃\quad) \tag{22}$$

とするが, elementary 射 $\downarrow\otimes\frown$ 等については多少複雑となる.

1) $Z^{(f)}(\underset{1}{\downarrow}\otimes\underset{\bar2\ 3}{\frown}) = \downarrow\otimes_\alpha \overset{\lambda^{-\frac12}}{\frown} = (\downarrow\otimes\overset{\lambda^{-\frac12}}{\frown})\circ\Phi_{1\bar2 3}$

2) $Z^{(f)}(\downarrow\otimes\overset{\bar2\ 3}{\smile}) = \downarrow\otimes_\alpha\underset{\lambda^{\frac12}}{\smile} = \Phi^{-1}_{1\bar2 3}\circ(\downarrow\otimes\underset{\lambda^{\frac12}}{\smile})$

3) $Z^{(f)}(\uparrow\otimes\underset{+\ -}{\frown}) = \uparrow\otimes_\alpha\overset{\lambda^{-\frac12}}{\frown} = (\uparrow\otimes\overset{\lambda^{-\frac12}}{\frown})\circ\Phi_{\bar1 2\bar3}$

4) $Z^{(f)}(\uparrow\otimes\overset{+\ -}{\smile}) = \uparrow\otimes_\alpha\underset{\lambda^{\frac12}}{\smile} = \Phi_{\bar1 2\bar3}\circ(\uparrow\otimes\underset{\lambda^{\frac12}}{\smile})$

5) $Z^{(f)}(\overset{+\ -}{\smile}\otimes\downarrow) = \underset{\lambda^{-\frac12}}{\smile}\otimes_\alpha\downarrow = (\underset{\lambda^{-\frac12}}{\smile}\otimes\downarrow)$

6) $Z^{(f)}(\underset{+\ -}{\frown}\otimes\underset{+}{\downarrow}) = \overset{\lambda^{\frac12}}{\frown}\otimes_\alpha\downarrow = \overset{\lambda^{\frac12}}{\underset{1\ \bar2}{\frown}}\otimes\underset{3}{\downarrow}$

7) $Z^{(f)}(\smile\otimes\uparrow) = \underset{\lambda^{-\frac12}}{\smile}\otimes\uparrow$

8) $Z^{(f)}(\underset{-\ +}{\frown}\otimes\underset{-}{\uparrow}) = \overset{\lambda^{\frac12}}{\frown}\otimes\uparrow$

$\otimes_\alpha$ は $\mathcal{T}[[h]]$ における $\otimes$ で assoc. constr. α による補正が組込んであるもの; 例 $Z^{(f)}(\underset{1}{\downarrow}\otimes\underset{\bar3\ \bar2}{\times}) = \downarrow\otimes_\alpha R^{-1}_{\bar3\bar2} = \Phi^{-1}\circ(\downarrow\otimes R^{-1}_{\bar3\bar2})\circ\Phi_{1\bar3\bar2}$ 等々. (23)

以下 tensor 積の左右を入れかえた積に対する $Z^{(f)}$ 値は, 右辺の tensor 積の左右を入れかえたものと等しい.

例えば

1)' $Z^{(f)}(\frown\otimes\downarrow) = \overset{\lambda^{-\frac12}}{\frown}\otimes_\alpha\downarrow$　　3)' $Z^{(f)}(\frown\otimes\uparrow) = \frown\otimes\uparrow$

2)' $Z^{(f)}(\smile\otimes\downarrow) = \downarrow\otimes_\alpha\underset{\lambda^{\frac12}}{\smile}$ など

(21) ～ (23) は Z^f を Z に置きかえても同じである. 両方を兼ねて $Z^{(f)}$ と記した.

ここで右辺のtensor積$\otimes_a$は，1)〜8)において示した通りassociativity constraintによる補正をほどこしたものの意味である．この様な面倒なことをする理由は，いわゆる duality $(\downarrow\otimes\cap)\circ(\cup\otimes\downarrow)\sim\downarrow$ in $\mathcal{L}^{(f)}$ が函手 $Z^{(f)}$によって保存されるようにしたい為である．$Z^{(f)}((\downarrow\otimes\cap)\circ(\cup\otimes\downarrow))=Z^{(f)}(\downarrow\otimes\cap)\circ Z^{(f)}(\cup\otimes\downarrow)$ は $(\downarrow\otimes\cap)\circ(\cup\otimes\downarrow)=(\downarrow_1\otimes\cap_{23})\circ\Phi_{123}\circ(\cup\otimes\downarrow)=\lambda_+=\lambda\cdot\downarrow$ ((20)参照) となるのが自然であるが，それが$Z^{(f)}(\downarrow)$つまり$\downarrow$となるように$Z^f(\downarrow\otimes\cap)$や$Z^f(\cup\otimes\downarrow)$を適当に定義しなければならない．それが上記の結果である．上記で $\overset{\lambda^{-\frac12}}{\cap}$ とあるのは，まず$\lambda^{-\frac12}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$の意味で，$\lambda$は初項1で始まる$h$のpower seriesであるので2乗根をとることも，逆数をとることも可能である（$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}(1,0)}(I,I)_0$の元として）
また$\cap$の上に積の形で$\lambda^{-\frac12}\cap$と書いたのは，$\mathrm{Mor}_{\mathcal{G}(1,0)}(I,I)_0$の元$\lambda^{-\frac12}$は無限個の弦をもつ弦図式(chord diagram)と考えられ，その円周と線$\cap$との連結和で定義された積を意味する．(例えば(20)において，$\lambda_+=\lambda\cdot\downarrow$である．)

あとは$\mathcal{L}^{(f)}$における射(tangles)の間の基本的な同位関係 $f\sim g$ に対して $Z^{(f)}(f)=Z^{(f)}(g)$ が成立することを験証すればよい．二，三の例を挙げると，$\cap\circ\times\sim\cap$ in $\mathcal{L}$ に対して，$Z^f(\cap_{12}\circ\times_{12})=\cap_{12}\circ e^{\frac{h}{2}t_{12}}$ であるが
$Z(\cap\circ\times)=\cap_{12}\circ e^{\frac{h}{2}t_{12}}=\cap_{12}$ (これは(17) iv)による)

従って $\infty\sim\bigcirc$ in $\mathcal{L}^f$ に対して $Z^f(\cap\circ\times\circ\cup)=e^{\frac{h}{2}}\bigcirc$

$\infty\sim\bigcirc$ in $\mathcal{L}$ に対して $Z(\cap\circ\times\circ\cup)=\cap\circ\cup=\bigcirc$

$(\downarrow\otimes\cap)\circ(\cup\otimes\downarrow)\sim\downarrow$ に対して $Z^{(f)}(\downarrow\otimes\cap)\circ Z^{(f)}(\cup\otimes\downarrow)=(\downarrow_1\otimes\overset{\lambda^{\frac12}}{\cap_{23}})\circ\Phi_{123}\circ(\underset{\lambda^{-\frac12}}{\cup}\otimes\downarrow)=\downarrow$

（$(\downarrow\otimes\cap)\circ(\cup\otimes\downarrow)=\downarrow=\downarrow$ in $\mathcal{T}$ であることに注意．）

一つのknot Kは射：$\phi\to\phi$ in $\mathcal{L}$と考えられるから、最初がη、最後がεで終るようなelementary morphismsの列の合成で表わされ、従って$Z^{(f)}(K)$は射Kの因子であるelementary射の$Z^{(f)}$による像の合成として表わされる。結局

$$Z^{(f)}(K) = \sum_{m\geq 0} Z^{(f)}_m(K)\cdot h^m$$

の形の形式的巾級数でh^mの係数$Z^{(f)}_m(K)$はm本のchordをもつchord diagramsの1次結合として$\mathcal{A}^{(f)}_m$の元を表わす。

補題. 特にKがm本の弦をもつ弦図式$D\,(\in\mathcal{D}^c_m)$から定まるknot $K_D=\varphi_m(D)\in\Lambda_m\ (\mathrm{mod}\ \Lambda_{m+1})$である場合、$Z^{(f)}(K_D)\equiv D\cdot h^m\ (\mathrm{mod}\ h^{m+1})$.

証明. $K_D=\varepsilon(K_{\{p_1,\cdots,p_m\}})$ ($\{p_1,\cdots,p_m\}$は二重点集合)と仮定してよい。このとき、

$K_D=\sum_\alpha \varepsilon(\alpha)K_\alpha=\sum_\alpha(K_{+,\alpha(p_2),\cdots,\alpha(p_m)}-K_{-,\alpha(p_2),\cdots,\alpha(p_m)})$の形であり、従って

$Z^f(K_D)=\sum_\alpha\{Z^f(K_{+,\alpha(p_2)\cdots\alpha(p_m)})-Z^f(K_{-,\alpha(p_2)\cdots\alpha(p_m)})\}=(R_{X_1Y_1}-R^{-1}_{X_1Y_1})\cdot$
$(\sum_\alpha Z^f(K_{\alpha(p_2)\cdots\alpha(p_m)}))=a\cdot(e^{\frac{h}{2}t_{X_1Y_1}}-e^{-\frac{h}{2}t_{X_1Y_1}})\cdot\sum_\alpha Z^f(K_{\alpha(p_2)\cdots\alpha(p_m)})$
$=a\cdot ht_{X_1Y_1}\cdot$ —— の形となり、inductionで$Z^f(K_D)$が$ht_{X_1Y_1}$, $ht_{X_2Y_2}$, $\cdots$ $ht_{X_mY_m}$の因子を含んで居り、それらの前後、中間の諸因子はε, ηの他はassociativity constraints α'sから生じたidを初項とするhの巾級数の形のものばかりである。従ってh^mの係数はDそのものとなり、その他の項はh^{m+1}で割り切れる。すなわち$Z^f(K_D)\equiv D\cdot h^m\ (\mathrm{mod}\ h^{m+1})$を得る。(以上多少不正確な表現があるが斟酌願い度い)。これによって(4)におけるφ_nは全射のみならず単射であることがわかり、$\mathcal{A}^f_n \overset{\varphi_n}{\cong} \Lambda^f_n/\Lambda^f_{n+1}$ (同型)というKontsevichの結果が得られる。

文献

[V]$_1$ V. A. Vassiliev, Cohomology of knot spaces, Theory of Singularities and its Applications (V. I. Arnold ed.) Amer. Math. Soc. Providence 1990

[V]$_2$ ————, Complements of discriminants of smooth maps, Topology and Applications. Trans. of Math. Mono. 98, A.M.S. Providence 1992

[D]$_1$ V. G. Drinfel'd, Quasi-Hopf algebras, Leninglad Math. J. 1 (1990), 1419-1457

[D]$_2$ ————, On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), Leninglad Math. J. 2 (1991), 829-860

[K] M. Kontsevich, Vassiliev's knot invariants, Adv. Sov. Math. (1993), 137-150

[C] P. Cartier, Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevich des nœuds, C.R. Acad. Sci. Paris t. 316 Série I, p. 1205-1210 (1993)

[B]$_1$ D. Bar-Natan, On the Vassiliev knot invariants, Topology 34 (1995) 423-472

[B]$_2$ ————, Non-associative tangles, Preprint

[L-M] T.Q.T. Lê and J. Murakami, The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links, Compositio Math.

[P] S. Piunikhin, Combinatorial expression for universal Vassiliev link invariant, Comm. Math. Physics 168, 1-22

[Ka] C. Kassel, Quantum groups, Springer V. GTM 155, Heidelberg 1994.

[Ko] T. Kohno, Monodromy Representations of Braided Groups and Yang-Baxter Equations, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 37,4 (1987) 139-160.